

Famiglie meromorfe e frazioni parziali (Ritz's lemma)

Proposizione $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}$ (*)

Corollario $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

(1) Osservazione:

$\sin^2 z = z^2 - \frac{z^4}{3} + O(z^6)$ ← intera (così $O(z^6) = z^6 q(z)$ con q intera.
 o un po' di algebra è in $\mathbb{C}$.

infatti: $\sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2}$ (vale per $z \in \mathbb{R}$ e per cont. analitica in $\mathbb{C}$)

e $\frac{1}{2} (1 - \cos 2z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} (2z)^{2k} = z^2 - \frac{z^4}{3} + O(z^6)$

Dim del Corollario Da (*)

(2) $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} = \frac{\pi^2 z^2 - \sin^2 \pi z}{z^2 \sin^2 \pi z} = \frac{\frac{\pi^4 z^4}{3} + O(z^6)}{z^2 \sin^2 \pi z} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{3}$

Quindi, da (*) segue che

$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z+n)^2}$

e prendendo il limite per $z \rightarrow 0$, da (2) segue che,

$\frac{\pi^2}{3} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \square$

Dim della Proposizione

(i) Innanzitutto dimostriamo che $f(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}$ è

una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli doppi in $z = n$.

Sia K un compatto in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow \text{dist}(K, \mathbb{Z}) > 0$ quindi, $z+n \neq 0 \forall n$

e $|n| \leq n$ su K , quindi se $|n| \geq 2n \Rightarrow$

$\sum_{|n| \geq 2n} \frac{1}{|n+2n|^2} \geq \sum_{|n| \geq 2n} \frac{1}{|n|^2 - |2n|^2} \geq \sum_{|n| \geq 2n} \frac{1}{n^2 - n^2} = \sum_{|n| \geq 2n} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2}$

$\geq \frac{4}{3} \sum_{|n| \geq 2n} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{|n| \geq 2n} \frac{1}{(n+2n)^2} \rightarrow \sum_{|n| \geq 2n} \frac{1}{n^2}$ uniformemente su K

$\Rightarrow$ Per Weierstrass - f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Chiaramente $z=n$ è un polo doppio $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, la parte reale è $\frac{1}{(z-n)^2}$.

Inoltre, $\sigma(z+1) = \sigma(z)$, $\forall z \in \Omega' = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

(ii) Ovviamente anche $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ è periodica di periodo 1.

$$\text{Ha, ora, } \boxed{f(z) := \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sigma(z), \quad z \in \Omega'}$$

mostriamo che $f(z)$ ha singolarità rimovibile in $z=n$.

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sigma(z) = \lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi(z-n)} - \sigma(z-n) \stackrel{(2)}{=} \frac{\pi^2}{3} - \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m^2}.$$

Quindi $f(z)$ è una funzione intera.

(iii) f è limitata: su $R := \{0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, $|f|$ ha un massimo

su $S := \{0 \leq x \leq 1, |y| \geq 1\}$ e ha

$$|z+n| = \sqrt{(x+n)^2 + y^2}$$

$$\text{se } |n| \geq 2, \quad |z+n| = \sqrt{(x+n)^2 + y^2} \geq \sqrt{(|n|-1)^2 + 1} \geq \sqrt{\frac{|n|^2}{4} + 1} \geq \frac{|n|}{2}$$

$$|f(z)| = |f| \left(1 - \frac{1}{|n|}\right) \geq \frac{|n|}{2}$$

Quindi

$$|\sigma(z)| = \left| \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \sum_{|n| \geq 2} \frac{1}{(z+n)^2} \right|$$

$$\leq \frac{1}{|z|^2} + \frac{1}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z+1|^2} + 8 \sum_{|n| \geq 2} \frac{1}{|n|^2}$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{4}{3} \pi^2 \leq 3 + \frac{4}{3} \pi^2 \quad \text{su } S.$$

Inoltre, osservando che, $\forall z = x+iy$

$$\operatorname{Re}(x+iy) = \operatorname{Re} x \operatorname{ch} y + i \operatorname{Im} x \operatorname{sh} y$$

$$|\operatorname{Im}(x+iy)| = \operatorname{Re}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{Im}^2 x \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{Re}^2 x \operatorname{ch}^2 y + (1 - \operatorname{Re}^2 x) \operatorname{sh}^2 y$$

$$= \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{Re}^2 x (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) = \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{Re}^2 x \geq \operatorname{sh}^2 y$$

Si ha dunque $|y| \geq 1$

$$\frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|^2} \leq \frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} \leq \frac{1}{\operatorname{sh}^2 1}$$

Quindi f è limitata su S . Per periodicità è limitata su tutto $\mathbb{C}$.

(iv) per l'osservazione si ha che $f(z) \equiv c$ è costante.

È sufficiente prendere $z = iy$, $y > 0$ abbiamo

$$\frac{1}{\sin^2 iz} = \frac{1}{\sin^2 iy} \rightarrow 0 \text{ per } y \rightarrow +\infty.$$

Allora $\sigma(iy) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow +\infty$:

$$|\sigma(iy)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(iy+n)^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|iy+n|^2} = \frac{1}{y^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y^2 + n^2}$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y^2 + n^2}$ converge uniformemente $\forall y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Quindi: } \lim_{y \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^2 + n^2} = 0 \quad \square$$